

**„DEFINITE SYSTEME UND QUADRATSUMMEN
IN DER TOPOLOGIE“**

KLAUS KÖHNEN

1979

1. Berichterstatter: Prof. A. Pfister, Mainz

2. Berichterstatter: Prof. J. Scheiba, Mainz

Datum der mündlichen Prüfung: 8. Januar 1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552618_0028

"Definite Systeme und Quadratsummen in der Topologie"

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des Grades

"D o k t o r d e r N a t u r w i s s e n s c h a f t"

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz

Klaus Köhnen
geb. in Wintrich/Kr. Bernkastel-
Wittlich

Mainz 1978



Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ 1 Problemstellung und Aufbau	1
§ 2 Berechnung der Zahlen $n_P(r,s)$	6
§ 3 Die Ungleichung $n_P(r,s) \leq n_H(r,s) \leq r + s - 1$	10
§ 4 Definite Systeme aus homogenen Formen	15
§ 5 Der Fall $r = s = 2^k$, 1. Teil	20
§ 6 Grundlagen der topologischen K-Theorie	25
§ 7 Der Fall $r = s = 2^k$, 2. Teil	37
§ 8 Konstruktion definiter Systeme und obere Abschätzungen für $n_H(r,s)$	42
Literaturverzeichnis	52

§ 1 Problemstellung und Aufbau

1) Sei K ein beliebiger Körper. Definiere

$$G_m = G_m(K) := \{ a \in K^* \mid a \text{ ist Summe von } m \text{ Quadraten in } K \}$$

Trivialerweise gilt nun $G_r \cdot G_s \subseteq G_{rs}$. Es gibt daher zu gegebenen natürlichen Zahlen r und s eine kleinste natürliche Zahl $n_p(r,s)$, sodaß für alle Körper K gilt

$$G_r \cdot G_s \subseteq G_{n_p(r,s)}.$$

Im nächsten Paragraphen werden wir diese Zahlen $n_p(r,s)$ berechnen und gleichzeitig zeigen, daß dann schon

$$G_r \cdot G_s = G_{n_p(r,s)}$$

gilt. Ist speziell $r = s = 2^k$, so gilt sogar $n_p(2^k, 2^k) = 2^k$, also

$$G_{2^k} \cdot G_{2^k} = G_{2^k}$$

und in diesem Fall ist G_{2^k} eine Untergruppe von K .

Für den rationalen Funktionenkörper $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s)$ $= \mathbb{R}(x, y)$ heißt dies:

es gibt rationale Funktionen $f_i(x, y)$, $1 \leq i \leq n_p(r, s)$,

$f_i \in \mathbb{R}(x, y)$ mit

$$(*) \quad (x_1^2 + \dots + x_r^2) (y_1^2 + \dots + y_s^2) = f_1^2 + \dots + f_{n_p(r,s)}^2$$

Sind in dieser Darstellung alle f_i Polynome in x und y , so lassen die f_i sich als stetige Funktionen

$$f_i : S^{r-1} \times S^{s-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

interpretieren. Die Beziehung $(*)$ bedeutet dann, daß das Gleichungssystem

$$f_1(x, y) = \dots = f_{n_p(r,s)} = 0$$

auf $S^{r-1} \times S^{s-1}$ keine Lösung besitzt.

2) Wir gehen nun den umgekehrten Weg. Dazu betrachten wir reellwertige stetige Funktionen

$$f : S^{r-1} \times S^{s-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

welche in folgendem Sinn ungerade sind

$$f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$$

für alle $(x, y) \in S^{r-1} \times S^{s-1}$.

Ein System aus n in diesem Sinn ungerader Funktionen f_k heißt definit, wenn das Gleichungssystem

$$f_1(x, y) = \dots = f_n(x, y) = 0$$

auf $S^{r-1} \times S^{s-1}$ unlösbar ist.

Zu gegebenen r und s gibt es immer ein definites System ungerader Funktionen, nämlich die Abbildungen

$$f_{ij}(x, y) := x_i y_j \quad 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$$

Es gibt daher zu gegebenen natürlichen Zahlen r und s eine kleinste natürliche Zahl n , so daß es ein definites System aus n in diesem Sinn ungerader Funktionen gibt. Sie wird im folgenden mit $n_H(r, s)$ bezeichnet. Klar ist:

$$n_H(r, s) = n_H(s, r).$$

Heinz Hopf [7] hat in seiner 1940 veröffentlichten Arbeit "Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra" dieses Problem behandelt und gezeigt:

gibt es ein definites System von n ungeraden Funktionen f_k in r Veränderlichen $x_1, \dots, x_r$ und s Veränderlichen $y_1, \dots, y_s$, so sind notwendig alle Binominalkoeffizienten

$$(\ast \ast) \quad \binom{n}{k} \quad \text{mit } n - r < k < s$$

gerade. Offen blieb jedoch, ob diese Bedingung auch hin-

reichend ist.

Ist für natürliche Zahlen r, s, n die Bedingung $(**)$ erfüllt, so schreiben wir abkürzend $B(r, s; n)$. Aus der Symmetrieeigenschaft der Binominalkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

folgt, daß die Bedingung $B(r, s; n)$ symmetrisch in r und s ist, d.h., $B(r, s; n)$ gilt genau dann wenn $B(s, r; n)$ gilt.

3) Der Zusammenhang

In §3 wird gezeigt, daß zu jedem r und s die algebraisch definierte Zahl $n_p(r, s)$ die kleinste natürliche Zahl n ist, sodaß $B(r, s; n)$ gilt. Daraus folgt die Ungleichung

$$n_p(r, s) \leq n_H(r, s)$$

Die hierdurch und durch die Darstellung $(*)$ motivierte Vermutung lautete:

gilt $n_p(r, s) = n_H(r, s)$ für alle $r, s \in \mathbb{N}$?

Diese Vermutung wird im folgenden widerlegt. In §7 zeige ich, daß $n_H(2^k, 2^k) = 2^k$ genau für $k = 0, 1, 2, 3$ gilt, wohingegen $n_p(2^k, 2^k) = 2^k$, wie erwähnt, für alle $k \in \mathbb{N}_0$ zutrifft.

4) Die Beschränkung des Definitionsbereichs auf $S^{r-1} \times S^{s-1}$ ist nicht erforderlich. Sei nämlich

$$f : S^{r-1} \times S^{s-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, ansonsten beliebige Funktion. Wir setzen f auf $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ fort wie folgt:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} \|x\| \cdot \|y\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) & \text{für } x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da f beschränkt ist, ist $\bar{f}$ stetig. Ist f ungerade, so gilt auch für alle $x \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{R}^s$

$$\bar{f}(-x,y) = \bar{f}(x,-y) = -\bar{f}(x,y).$$

Wir nennen eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade (analog zum obigen Fall), falls $g(-x,y) = g(x,-y) = -g(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ gilt.

Ein System aus n ungeraden Funktionen $g_i : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ heißt definit, wenn das Gleichungssystem

$$g_1(x,y) = \dots = g_n(x,y) = 0$$

nur die trivialen Lösungen $x = 0$ oder $y = 0$ zuläßt.

Gleichwertig sind dann die Aussagen:

- (i) Es gibt ein auf $S^{r-1} \times S^{s-1}$ definiertes definites System aus n Funktionen f_i
- (ii) Es gibt ein auf $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ definiertes definites System aus n Funktionen g_i
- (iii) Es gibt eine Stetige ungerade (wie oben) Abbildung $h : S^{r-1} \times S^{s-1} \rightarrow S^n$

Man braucht die f_i dazu nur wie oben auf fortzusetzen.

5) Aufbau

In §2 werden die Zahlen $n_p(r,s)$ berechnet. Dabei zeigt sich, daß sie nur von den dyadischen Entwicklungen von $r-1$ und $s-1$ abhängen.

§3 liefert die Ungleichung $n_p(r,s) \leq n_H(r,s) \leq r + s - 1$

In §4 wird gezeigt, daß man zu jedem definiten System aus n Funktionen ein definites System aus n Formen mit ganzzahligen Koeffizienten konstruieren kann.

In §5 wird hergeleitet, daß für die Widerlegung der Vermutung der Fall $r = s = 2^k$ allein von Interesse ist.

In §6 werden die Grundlagen der komplexen topologischen K-Theorie entwickelt. Dabei habe ich nur berücksichtigt, was in §7 zur Widerlegung der ursprünglichen Vermutung nötig ist.

In §8 werden für einige (viele) Spezialfälle die Zahlen $n_H(r,s)$ explizit angegeben bzw. obere Schranken berechnet, die besser als die generelle obere Schranke $r+s-1$ ausfallen. Es stellt sich heraus, daß trotz der allgemeinen Verschiedenheit von $n_P(r,s)$ und $n_H(r,s)$ in vielen Fällen für beliebig große r und s dennoch $n_P(r,s) = n_H(r,s)$ gilt, selbst da, wo $n_P(r,s)$ kleiner als $r+s-1$ ist.

§ 2 Berechnung der Zahlen $n_p(r,s)$

Wir benötigen einen vorbereitenden

Satz 1 Sei K ein Körper, $n = 2^m$ eine Potenz von 2.

- (i) $a \in K$ ist genau dann Summe von n Quadraten in K , wenn es eine n -reihige quadratische Matrix A über K gibt:

$$A A^t = A^t A = a E_n$$

- (ii) G_n ist eine Untergruppe von K

Bew.: 1) a sei Summe von 2^m Quadraten über K . Wir machen

Induktion nach m .

$$m = 0: a = a_1^2, A := (a_1)$$

$m \rightarrow m+1$: Sei $c = a + b$, a und b Summen von $2^m =: n$

Quadraten. O.E. Sei $a \neq 0$. Nach Induktionsannahme existie

$A, B \in K_n$ mit $A^t A = A A^t = a E_n$ und $B^t B = B B^t = b E_n$. S

$$C = \begin{bmatrix} A & -B \\ a^{-1} A^t B^t A & A^t \end{bmatrix}$$

$$\text{Dann folgt } C C^t = C^t C = c E_{2n}.$$

Die Umkehrung ist trivial.

2) Seien $a, b \in G_n$. Dann gibt es Matrizen A, B wie unter (i)

$$\text{Mit } C := AB \text{ folgt: } C C^t = C^t C = ab E_n.$$

Also ist $ab \in G_n$.

Mit a liegt auch a^{-1} in G_n . Denn es ist

$$(a^{-1}A) (a^{-1}A)^t = a^{-1}E_n.$$

Wir können nun $n_p(r,s)$ bestimmen.

Hauptsatz 2 Gegeben seien natürliche Zahlen r und s .

Hat man die dyadischen Entwicklungen

$$r - 1 = \sum_{i \geq 0} r_i 2^i, \quad s - 1 = \sum_{i \geq 0} s_i 2^i \quad (r_i, s_i = 0 \text{ oder } 1),$$

dann gilt

$$n_P(r, s) = \begin{cases} \sum_{i \geq j} (r_i + s_i) 2^i & \text{falls } r_j s_j = 1 \text{ und } r_i s_i = 0 \\ & \text{für } i > j \\ r + s - 1 & \text{falls } r_i s_i = 0 \text{ für alle } i \end{cases}$$

Insbesondere gilt $G_r \cdot G_s = G_{n_P(r, s)}$

Bew.: 1) Wir zeigen: Ist $q = \tilde{q}(r, s)$ wie in der Behauptung definiert, dann gilt für alle Körper K

$$G_r \cdot G_s \subseteq G_q, \text{ d.h., } n_P(r, s) \leq q.$$

O.E. sei $r \leq s$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach r .

$r = 1$: trivial

$r-1 \rightarrow r$: Sei $2^{k-1} \leq r-1 < 2^k$ ($k \geq 1$), also $r_{k-1} = 1$,

und sei $s-1 = v2^k + t-1$ mit $v \geq 0$ und

$$0 \leq t-1 < 2^k.$$

Ist $2^{k-1} \leq t-1$, so ist $s_{k-1} = 1$ und somit

$$q(r, s) = \sum_{i \geq k-1} (r_i + s_i) 2^i = v2^k + 2^k = (v+1)2^k$$

Nach Satz1 gilt aber:

$$G_r \cdot G_s \subseteq G_{2^k} G_{(v+1)2^k} \subseteq G_{(v+1)2^k}.$$

Ist $t-1 < 2^{k-1}$, so ist $s_{k-1} = 0$ und

$$q(r, s) = v2^k + q(r, t)$$

Satz1 und die Induktionsannahme für das Paar (t, r) anstelle von (r, s) liefern dann

$$\begin{aligned} G_r \cdot G_s &= G_r \cdot G_{v2^{k+t}} \subseteq G_r \cdot G_{v2^k} + G_r \cdot G_t \\ &\subseteq G_{v2^{k+q(t,r)}} \cup \{0\} \end{aligned}$$

Da aber $0 \notin G_r \cdot G_s$ gilt, ist auch hier $G_r \cdot G_s \subseteq G_{q(r,s)}$.

2) Wir zeigen weiter: Ist q wie oben definiert, so gilt

$$\text{sogar: } G_q = G_r \cdot G_s$$

Sei dazu wieder o.E. $r \leq s$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach r .

$r = 1$: trivial

$r-1 \rightarrow r$: Sei wie oben $2^{k-1} \leq r-1 < 2^k$, also $r_{k-1} = 1$,
 $s-1 = v2^k + t-1$ mit $v \geq 0$ und $0 \leq t-1 < 2^k$

Ist $2^{k-1} \leq t-1$, so ist $q(r,s) = (v+1)2^k$.

Sei nun $0 \neq d = a + b + c$ mit a, b Summen von jeweils 2^{k-1} Quadraten, c Summe von $v2^k$ Quadraten. (Ist $v = 0$, so ist $c = 0$ zu wählen). Ist $a = 0$, so liegt d wegen $t \geq 2^{k-1}$ schon in $G_{t+v2^k} = G_s$. Sei also $a \neq 0$.

Nach Satz 1 liegt a^{-1} in $G_{2^{k-1}} \subseteq G_r$

Ebenfalls nach Satz 1 liegt $1 + a^{-1}b + a^{-1}c$ in

$G_{1+2^{k-1}+v2^k} \subseteq G_s$. Daher gilt

$$d = a(1 + a^{-1}b + a^{-1}c) \in G_r \cdot G_s.$$

Ist $0 < t < 2^{k-1}$, so ist $q(r,s) = v2^k + q(r,t)$

Sei $d = a + b \in G_{q(r,s)}$ mit $a \in G_{v2^k}$, $b \in G_{q(r,t)}$

Wir können a und $b \neq 0$ (und somit auch $v \neq 0$) annehmen, denn sonst gilt ohnehin $d \in G_r \cdot G_s$.

Wir haben also $d = b(1 + ab^{-1})$

Nach Induktionsannahme gibt es $b_1 \in G_r$, $b_2 \in G_t$ mit

$$b = b_1 b_2.$$

Nach Satz 1 liegt $b_2(1 + ab^{-1})$ in G_s .

3) Daß die Zahlen $n_p(r,s)$ nicht kleiner als die in der Behauptung angegebenen Zahlen gewählt werden können, folgt aus 2) und aus der Existenz von Körpern K mit

$$G_1(K) \not\subset G_2(K) \not\subset G_3(K) \not\subset \dots$$

Als Beispiel denke der Körper $\mathbb{R}(x_1, x_2, x_3, \dots)$ mit Unbestimmten $x_1, x_2, x_3, \dots$.

Einzelheiten findet man bei Cassels [5] bzw. Pfister [13], [14].

§ 3 Die Ungleichung $n_p(r,s) \leq n_H(r,s) \leq r + s - 1$

Zunächst werden wir zeigen, daß zu gegebenen natürlichen Zahlen r, s die Zahl $n_p(r,s)$ die kleinste natürliche Zahl n ist, sodaß $B(r,s;n)$ gilt. Dies ist der erste Teil der Ungleichung.

Der zweite Teil folgt aus der Tatsache, daß man zu gegebenen $r, s \in \mathbb{N}$ stets ein definites System aus $r+s-1$ ungeraden Funktionen konstruieren kann. Dies soll am Ende des Paragraphen geschehen.

Def. 1

Sei $n = \sum_{i \geq 0} n_i 2^i$, $m = \sum_{i \geq 0} m_i 2^i$ ($n_i, m_i = 0$ oder 1)

m heißt Teilsumme von n , wenn $m_i \leq n_i$ für alle i gilt.

Hat man die weiteren Darstellungen von n und m

$$n = \sum_{i=0}^j n_i 2^i + v_n 2^{j+1} \quad v_n \geq 0$$

$$m = \sum_{i=0}^j m_i 2^i + v_m 2^{j+1} \quad v_m \geq 0$$

so heißt m Pseudoteilsumme von n , wenn alle $m_i \leq n_i$ und $v_n \leq v_m$.

Hilfssatz 2

Seien k und n natürliche Zahlen, $k \leq n$,

$$k = \sum_{i \geq 0} k_i 2^i, \quad n = \sum_{i \geq 0} n_i 2^i$$

Genau dann ist $\binom{n}{k}$ ungerade, wenn k Teilsumme von n ist.

Bew.: 2 geht in $n!$ in der Potenz

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor + \dots = n - \sum_{i \geq 0} n_i \text{ auf.}$$

Setzt man $n - k = \sum_{i \geq 0} l_i 2^i$, dann geht also 2 in

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ in der Potenz}$$

$$n - \sum_{i \geq 0} n_i - (k - \sum_{i \geq 0} k_i) - (n-k - \sum_{i \geq 0} l_i)$$

$$= \sum_{i \geq 0} k_i + \sum_{i \geq 0} l_i - \sum_{i \geq 0} n_i \text{ auf.}$$

Dies ist dann und nur dann gleich 0, wenn

$$\sum_{i \geq 0} l_i + \sum_{i \geq 0} k_i = \sum_{i \geq 0} n_i$$

ist. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn bei der Addition von k und $n-k$ an keiner Stelle eine Dualübertragung in eine höhere Stelle eintritt (da sonst $\sum_{i \geq 0} l_i + \sum_{i \geq 0} k_i > \sum_{i \geq 0} n_i$ ist), d.h., wenn für alle i gilt

$$k_i + l_i = n_i$$

also genau dann, wenn k Teilsomme von n ist.

Hauptsatz 3 r und s seien natürliche Zahlen. Dann ist die

Zahl $n_p(r, s)$ die kleinste natürliche Zahl n , sodaß $B(r, s; n)$ gilt.

Bew.: Sei $r-1 = \sum_{i \geq 0} r_i 2^i$, $s-1 = \sum_{i \geq 0} s_i 2^i$

1) alle $r_i s_i = 0$, also $n_p(r, s) = r+s-1$. Es gibt keine natürliche Zahl k mit $(r+s-1) < k \leq s$.

Also gilt $B(r, s; r+s-1)$.

Sei $m = r+s-2$. Dann gilt für $k = s-1$: $m-r \leq k \leq s$. k ist Teilsumme von m , also ist nach dem vorigen Hilfssatz $\binom{m}{k}$ ungerade.

$$2) \quad n = n_P(r,s) = \sum_{i \geq j} (r_i + s_i) 2^i$$

Es gebe nun eine natürliche Zahl k mit $n-r \leq k \leq s$

$$\begin{aligned} n - (r-1) &= \sum_{i \geq j} (r_i + s_i) 2^i - \sum_{i \geq 0} r_i 2^i \\ &= \sum_{i \geq j} s_i 2^i - \sum_{i=0}^{j-1} r_i 2^i, \text{ also} \end{aligned}$$

$$1 + \sum_{i=0}^{j-1} (1-r_i) 2^i + \sum_{i \geq j+1} s_i 2^i \leq k \leq \sum_{i \geq 0} s_i 2^i, \text{ d.h.}$$

$$1 + \sum_{i=0}^{j-1} (1-r_i) 2^i \leq k - \sum_{i \geq j+1} s_i 2^i \leq \sum_{i=0}^j s_i 2^i$$

Das bedeutet: Der kleinste nichtnegative Rest von k modulo 2^{j+1} liegt zwischen 1 und $2^{j+1}-1$. Sei $k = \sum_{i \geq 0} k_i 2^i$. Dann existiert ein j' mit $0 \leq j' \leq j$ und $k_{j'} \neq 0$.

k ist keine Teilsumme von n , also $\binom{n}{k}$ gerade.

Setze nun $m = n-1$.

$$m = \sum_{i=0}^j 2^i + \sum_{i \geq j+1} (r_i + s_i) 2^i.$$

Da für $i \geq j+1$ $r_i s_i = 0$ ist, ist dies die dyadische Entwicklung von m .

$s-1$ erfüllt die Ungleichung $m-r \leq s-1 \leq s$, $s-1$ ist Teilsumme von m , also ist $\binom{m}{s-1}$ ungerade.

$$3) \quad \text{da wegen } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$B(r,s;n) B(r,s;n+1)$ impliziert, ist damit der Hauptsatz bewiesen.

Der Rest der Ungleichung folgt aus folgendem

Beispiel 4 Seien $r, s \in \mathbb{N}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s$$

Setze

$$f_k(x, y) := \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ 1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} x_i y_j \quad k = 1, \dots, r+s-1$$

Dann ist das System der f_k definit.

Bew.: durch Induktion nach $r+s$

$r+s=2$ es folgt: $r = s = 1$, $f_1(x, y) = x_1 y_1$

$r+s \rightarrow r+s+1 = r'+s'$ $f_1(x, y) = 0 = x_1 y_1$. Ist etwa $x_1 = 0$,
so ist man fertig, falls $r' = 1$. Sei $r' > 1$.

Das verbleibende System

$$f_2(x, y) = \dots = f_{r'+s'-1}(x, y) = 0$$

ist dann ein analoges Gleichungssystem in $r+s$ Variablen.

Es folgt $x_2 = \dots = x_{r'} = 0$ oder $y_1 = \dots = y_{s'} = 0$.

Genau so verfährt man, wenn $y_1 = 0$ ist.

Bem.: 1) In Beispiel 4 spielt der zu Grunde gelegte Körper
formal überhaupt keine Rolle.

2) An der dyadischen Entwicklung von $r-1$ bzw. $s-1$ allein
läßt sich ablesen, wann $n_p(r, s) = r+s-1$ ist, und dies tritt
ein. Indiesem Fall fallen also obere und untere Schranke

zusammen. Zudem ist eine explizite Konstruktion eines definiten Systems gegeben.

§ 4 Definite Systeme aus homogenen Formen

Ziel des Paragraphen ist der Beweis von folgendem

Hauptsatz1 r, s seien natürliche Zahlen. Gegeben sei ein
definites System $f_1, \dots, f_n$ ungerader Funktionen

$$f_i: S^{r-1} \times S^{s-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dann gibt es Polynome $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s]$,
sämtliche homogen von ungeradem Homogenitätsgrad bezüglich
 x und y , so daß die g_i , als Funktionen

$$g_i: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

aufgefaßt, ein definites System bilden.

Bez.: Ist $f: S^{r-1} \times S^{s-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so
bezeichne

$$\|f\| := \max_{(x,y) \in S^{r-1} \times S^{s-1}} |f(x,y)|$$

die übliche Maximumsnorm.

Satz2 Sei $f: S^{r-1} \times S^{s-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ungerade.

Dann gibt es zu jedem vorgegebenem $\delta > 0$ eine Form
 $h(x,y)$ welche ungerade bzgl. x und y ist und für welche gilt

$$\|f - h\| \leq \delta$$

Bew.: Nach dem Satz von Stone-Weierstraß existiert ein
Polynom $p(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ mit

$$\|f - p\| \leq \varepsilon := \frac{\delta}{4}$$

p läßt sich als Summe von 4 Polynomen p_i , $1 \leq i \leq 4$, schreiben mit

$$\left. \begin{aligned} p_1(-x, y) &= p_1(x, -y) = -p_1(x, y) \\ p_2(-x, y) &= p_2(x, y) = -p_2(x, -y) \\ p_3(x, -y) &= p_3(x, y) = -p_3(-x, y) \\ p_4(-x, y) &= p_4(x, -y) = p_4(x, y) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &\text{für alle} \\ &(x, y) \in \mathbb{R}^{r-1} \times \mathbb{R}^s \end{aligned}$$

für $(x, y) \in S^{r-1} \times S^{s-1}$ gilt dann

$$-\varepsilon \leq f(x, y) - p_1(x, y) - p_2(x, y) - p_3(x, y) - p_4(x, y) \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon \leq -f(x, y) + p_1(x, y) - p_2(x, y) + p_3(x, y) - p_4(x, y) \leq \varepsilon$$

Dabei entsteht die zweite Zeile aus der ersten, indem man x durch $-x$ ersetzt und die Funktionalgleichungen anwendet.

Es folgt

$$-2\varepsilon \leq -2p_2(x, y) - 2p_4(x, y) \leq 2\varepsilon, \text{ d.h. } \|p_2 + p_4\| \leq \varepsilon$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \|f - p\| = \|f - p_1 - p_2 - p_3 - p_4\| \\ &\geq \|f - p_1 - p_3\| - \|p_2 + p_4\| \\ &\geq \|f - p_1 - p_3\| - \varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{also } \|f - p_1 - p_3\| \leq 2\varepsilon$$

Indem man diese Normungleichung explizit hinschreibt und y durch $-y$ ersetzt, erhält man

$$\|p_3\| \leq \varepsilon$$

Dies heißt aber

$$\|f - p_1\| \leq 4\varepsilon = \delta$$

Es ist

$$p_1(x,y) = \sum_{\text{endl.}} a_{\nu_1, \dots, \nu_r; \mu_1, \dots, \mu_s} x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r} y_1^{\mu_1} \dots y_s^{\mu_s}$$

mit $\sum \nu_i \equiv \sum \mu_i \equiv 1 \pmod{2}$.

Sei ν der Grad von p_1 bzgl. x und μ der Grad von p_1 bzgl. y . Dann sei

$$h(x,y) := \sum a_{\nu_1, \dots, \nu_r; \mu_1, \dots, \mu_s} x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r} \left(\sum x_i^2 \right)^{\frac{\nu - \sum \nu_i}{2}} y_1^{\mu_1} \dots y_s^{\mu_s} \left(\sum y_j^2 \right)^{\frac{\mu - \sum \mu_i}{2}}$$

(p_1 wird homogen gemacht!)

h ist dann homogen vom Grad ν bzgl. $\bar{x}$ und μ bzgl. y .

ν und μ sind ungerade.

Als Funktionen

$$p_1: S^{r-1} \times S^{s-1} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.}$$

$$h: S^{r-1} \times S^{s-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stimmen p_1 und h überein. Es folgt

$$\|f - h\| \leq \delta$$

Satz 3 Sei $f_1, \dots, f_n$ ein definites System ungerader Funktionen

$$f_i: S^{r-1} \times S^{s-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dann gibt es Formen $g_i \in \mathbb{R}[x,y]$, welche ungerade bzgl. x und y sind, sodaß die g_i ein definites System von Funktionen

$$g_i: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$$

bilden.

Bew.: $M := \min_{(x,y) \in S^{r-1} \times S^{s-1}} \sum_{i=1}^n |f_i(x,y)|$

M existiert und ist von 0 verschieden.

Wähle ein δ mit $0 < \delta < \frac{M}{n}$

Wähle ferner Formen g_i wie in Satz 2 mit $\|f_i - g_i\| \leq \delta$

Für alle $(x,y) \in S^{r-1} \times S^{s-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |g_i(x,y)| &= \sum_{i=1}^n |g_i(x,y) - f_i(x,y) + f_i(x,y)| \\ &\geq \sum_{i=1}^n |f_i(x,y)| - \sum_{i=1}^n |g_i(x,y) - f_i(x,y)| \\ &\geq M - n\delta > 0. \end{aligned}$$

Beweis des Hauptsatzes

Wähle n Formen g'_i wie in Satz 3. Es ist dann

$$g'_i(x,y) = \sum a_{I,J}^i x^I y^J$$

$a_{I,J}^i x^I y^J$ steht für $a_{\nu_1, \dots, \nu_r; \mu_1, \dots, \mu_s}^i x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r} y_1^{\mu_1} \dots y_s^{\mu_s}$

n_i sei die Anzahl der von 0 verschiedenen Koeffizienten von g'_i .

$$M := \min_{(x,y) \in S^{r-1} \times S^{s-1}} \sum |g'_i(x,y)|, \quad M \text{ ist } > 0!$$

Für $i = 1, \dots, n$ wähle $\varepsilon_i > 0$, sodaß $M - \sum \varepsilon_i > 0$ ist.

Für festes i wähle schließlich $b_{I,J}^i \in \mathbb{Q}$ mit

$$|a_{I,J}^i - b_{I,J}^i| < \varepsilon_i$$

Dabei ist $b_{I,J}^i = 0$ zu wählen, falls $a_{I,J}^i = 0$ ist.

$$h_i(x,y) := \sum b_{I,J}^i x^I y^J$$

Für alle $(x,y) \in S^{r-1} \times S^{s-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 \sum_i |h_i(x,y)| &= \sum_i |h_i(x,y) - g'_i(x,y) + g'_i(x,y)| \\
 &> \sum_i |g'_i(x,y)| = \sum_{i,I,J} |a_{I,J}^i - b_{I,J}^i| |x^I| |y^J| \\
 &> \sum_i M = \sum_{i,I,J} |a_{I,J}^i - b_{I,J}^i| \\
 &> M = \sum n_i \varepsilon_i > 0
 \end{aligned}$$

Die g_1 erhält man nun aus den h_i , indem man die h_i mit dem Hauptnenner der auftretenden rationalen Koeffizienten multipliziert.

§ 5 Der Fall $r = s = 2^k$, 1. Teil

Sei zunächst $0 < k \leq 3$.

Betrachte die Matrizen

$$A_0(x) = (x_1) \quad x_1$$

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^2$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^4$$

$$A_3(x) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & -x_6 & x_5 & -x_8 & x_7 \\ x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 & -x_7 & x_8 & x_5 & -x_6 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & x_8 & x_7 & -x_6 & -x_5 \\ x_5 & x_6 & x_7 & -x_8 & x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_6 & -x_5 & -x_8 & -x_7 & x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 & x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_8 & -x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^8$$

Durch einfache Rechnungen bestätigt man:

$$A_k(x) A_k^t(x) = A_k^t(x) A(x) = (x_1^2 + \dots + x_{2^k}^2) E_{2^k}$$

Für $x \in \mathbb{R}^{2^k} - 0$ ist daher $A_k(x)$ regulär. Setzt man für $(x, y) \in \mathbb{R}^{2^k} \times \mathbb{R}^{2^k}$

$$F(x, y) = A_k(x)y = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ \vdots \\ f_{2^k}(x, y) \end{pmatrix}$$

so bilden die f_i ein definites System.

Korollar1 $n_P(2^k, 2^k) = n_H(2^k, 2^k) = 2^k$ für $0 \leq k \leq 3$

Bem.: Die oben definierte Funktion F prägt dem Vektorraum die Struktur einer Divisionsalgebra auf. Für $k = 0, \dots, 3$ erhält man (bis auf Isomorphie) die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen sowie die Cayley-schen Zahlen.

Korollar1 kann erheblich verbessert werden.

Satz2 Sei $r \leq 8$ oder $s \leq 8$. Dann gilt

$$n_H(r, s) = n_P(r, s)$$

Alle Funktionen können als Bilinearformen mit ganzzahligen Koeffizienten gewählt werden.

Bew.: O.E. sei $s \leq 8$. Setze $n = n_P(r, s)$. In §3 ist gezeigt worden, daß dann die Bedingung $B(r, s; n)$ erfüllt ist.

Man wähle n Linearformen $X_1, \dots, X_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten in den $x_1, \dots, x_r$ und n Linearformen $Y_1, \dots, Y_n$ in den $y_1, \dots, y_s$ so, daß je r der X_k bzw. s der Y_l linear unabhängig sind.

Weiter sei $n = n_0 + n_1 2 + n_2 4 + u 8$, $n_i = 0$ oder 1 , $u = 0$.

Sei $q = n_0 + n_1 + n_2 + u$. n läßt sich also als q Potenzen von 2 schreiben:

$$n = \sum_{i=0}^q m_i$$

mit $m_j = 2^j$, $j \leq 3$, derart, daß die Potenzen 2^j mit $j \leq 2$ höchstens einmal auftreten.

Die X_k und Y_l werden nun in je q Gruppen eingeteilt.

$X_1, \dots, X_{m_1}, \dots, X_{m_1+1}, \dots, X_{m_1+m_2}, \dots, X_{n-m_q+1}, \dots, X_n$

$Y_1, \dots, Y_{m_1}, \dots, Y_{m_1+1}, \dots, Y_{m_1+m_2}, \dots, Y_{n-m_q+1}, \dots, Y_n$

Die X_k bzw. Y_l in der p -ten Gruppe fasse man als neue

Variable auf und bilde mit Ihnen gemäß obigem Beispiel ein

definites System aus m_p Bilinearformen mit ganzzahligen

Koeffizienten. Man erhält so $n = m_1 + \dots + m_q$ ganzzahlige

Bilinearformen in den X_k bzw. Y_l , also auch in den

$x_1, \dots, x_r$ bzw. $y_1, \dots, y_s$.

Beh.: Das so konstruierte System ist definit.

Sei nämlich $x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s$ eine Lösung. Dem entspricht eine Lösung in den X_k bzw. Y_l .

Die p -te Teilgruppe ist in den in ihr auftretenden X_k bzw.

Y_l definit. Also müssen die m_p X_k oder die m_p Y_l verschwinden

(oder beide). Ist A die Mindestanzahl der X_k , die verschwinden,

B die Mindestanzahl der Y_l , die verschwinden, so können

A und B offenbar so gewählt werden, daß $A + B = n$, und daß

A und B Summen von Zahlen m_p sind.

B ist dann Pseudoteilsomme von n (siehe Def.1 von §3)

B kann keine der möglichen Zahlen k mit $n-r \leq k \leq s$ sein.

Wegen $k = B \leq s \leq 8$ wäre dann k Teilsomme von n und somit

nach Hilfssatz2 von §3 $\binom{n}{k}$ ungerade.

Somit gilt $B \geq s$ oder $B \leq n-r$.

$s \leq B$ impliziert, daß mindestens s Linearformen Y_l verschwinden, also $y_1 = \dots = y_s = 0$ sind.

$B \leq n-r$ heißt $r \leq n - B = A$. Und daraus folgt:

$x_1 = \dots = x_r = 0$.

Warum ist der Fall $r = s = 2^k$ von besonderem Interesse?

Diese Frage beantwortet

Satz3 Es sei $n_H(2^k, 2^k) = 2^k$ für $k = 0, 1, \dots, N$. (Dies ist nach Korollar1 für $N = 3$ sicher richtig.)

Ist dann $s \leq 2^k$ und sind sämtliche Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit $n-r \leq k \leq s$ gerade, so existiert ein definites System aus n Formen.

D.h., die Bedingung $B(r, s; n)$ wäre genau dann hinreichend, wenn $n_H(2^k, 2^k) = 2^k$ für alle $k \geq 0$ gelten würde.

Der Beweis ist eine wörtliche Wiederholung des Beweises von Satz2.

Wir beschäftigen uns daher im Folgenden mit dem Nachweis, daß

$$n_H(m, m) = m$$

genau für $m = 1, 2, 4$ oder 8 gilt. Daß m eine Potenz von 2 sein muß, ist klar. Man muß nur beachten, daß $n_P(m, m) = m$ genau dann gilt, wenn m eine Potenz von 2 ist.

Bem.: An dieser Stelle erscheint die Motivation für die

Vermutung, daß die Bedingung $B(r, s; n)$ auch hinreichend ist, besonders plausibel. Dazu liegen drei Gründe vor.

1) $n_H(r, s) = n_P(r, s)$, falls $n_P(r, s) = r+s-1$ ist, was im

Übrigen für beliebig große r und s zutrifft.

2) $n_H(r, s) = n_P(r, s)$, falls $r \leq 8$ oder $s \leq 8$

3) Für $m = 2^k$ gilt

$$(x_1^2 + \dots + x_m^2) (y_1^2 + \dots + y_m^2) = f_1^2 + \dots + f_m^2$$

für geeignete rationale Funktionen

$$f_i \in \mathbb{R}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m).$$

§ 6 Grundlagen der komplexen topologischen K-Theorie

Im Folgenden wird eine sehr kurze Zusammenfassung der elementaren Definitionen und einiger Sätze aus der komplexen topologischen K-Theorie gebracht. Für Einzelheiten sei auf Atiah [2], Husemoller [8] bzw. Karoubi [9] hingewiesen.

Verabredung Wir entwickeln die Theorie nur für kompakte topologische Räume, obwohl viele Aussagen auch für z.B. parakompakte Räume übertragen werden können. Wir tun dies deshalb, weil alle später in Frage kommenden Räume kompakt sind.

Ferner verabreden wir, daß eine Abbildung f eines topologischen Raumes X in einen topologischen Raum X' stets als stetig vorausgesetzt wird, was im weiteren Verlauf nicht mehr explizit erwähnt wird.

Def.1 X sei ein festgewählter kompakter topologischer Raum ($\neq \emptyset$)

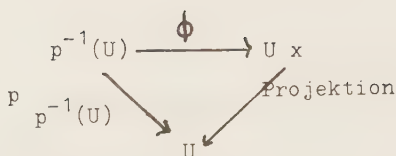
Ein komplexes Vektorraumbündel, kurz Vektorbündel, ist ein Tripel (E, p, X) . Dabei ist E ein topologischer Raum, $p: E \rightarrow X$ eine surjektive Abbildung.

(E, p, X) habe folgende Eigenschaften:

- (i) Für jedes $x \in X$ trägt $p^{-1}(x)$ die Struktur eines n -dimensionalen komplexen Vektorraumes.
 n hängt i.A. von x ab.
- (ii) Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U = U(x) \subseteq X$, $x \in U$, und einen Homöomorphismus

$$\phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n \quad (n \text{ geeignet})$$

so daß folgendes Diagramm kommutativ ist



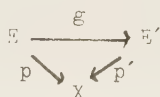
Ferner sei $\phi|_{p^{-1}(y)}$ ein $\mathbb{C}$ -linearer Isomorphismus für alle $y \in U$.

E heißt der Totale Raum, p heißt die Projektion, X heißt der Basisraum.

Im Folgenden schreiben wir statt (E, p, X) meist nur E hin.

Die Kategorie $\mathcal{E}(X)$ der komplexen Vektorbündel über X kann nun erklärt werden.

Objekte sind Tripel (E, p, X) . Morphismen sind Abbildungen $g: E \rightarrow E'$, sodaß das Diagramm



kommutativ ist und $g|_{p^{-1}(x)}$ ein linearer Homomorphismus von $p^{-1}(x)$ in $p'^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ ist. Als Abbildungen zwischen Vektorbündeln werden also nur Abbildungen dieser Art zugelassen.

Zwei Vektorbündel E und F über X heißen isomorph, im Zeichen $E \cong F$, wenn es einen Homöomorphismus $h: E \rightarrow F$ gibt.

Ein Vektorbündel E heißt trivial, wenn es in $\mathcal{E}(X)$ einen Isomorphismus $g: E \rightarrow X \times \mathbb{C}^n$ für ein geeignetes $n \geq 0$ gibt.

Isomorphie von Vektorbündeln ist offenbar eine Äquivalenzrelation. $\{E\}$ bezeichne die Isomorphieklasse von E . $\text{Vekt}(X)$ bezeichne die Menge der Isomorphieklassen von Vektorbündeln über X .

Wir möchten $\text{Vect}(X)$ zu einem kommutativen Halbring mit 1 machen. Dazu die

Def.2: $\mathcal{E}$ sei die Kategorie der endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorräume. Ein Funktor

$$\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

heißt stetig, falls für jedes Paar $M, N \in \mathcal{E}$ die zugehörige Abbildung

$$\varphi_{M,N}: \text{Hom}(M, N) \longrightarrow \text{Hom}(\varphi(M), \varphi(N))$$

bezüglich der üblichen Topologie auf endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorräumen stetig ist.

Jedem Stetigen Funktor $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ kann wie folgt ein Funktor $\varphi' = \varphi'(X): \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$ zugeordnet werden. Sei (E, p, X) ein Vektorbündel.

$E' = \varphi'(E)$ sei die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{x \in X} \varphi(p^{-1}(x))$

$p': E' \longrightarrow X$ sei die offensichtliche Projektion.

Wir erklären auf E' eine Topologie wie folgt:

$\{U_i\}_{1 \leq i \leq r}^{*)}$ sei eine offene Überdeckung von X , derart, daß für geeignete Funktionen $\beta_i: p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^{m_i}$ fasernweise lineare Homöomorphismen sind.

φ induziert dann einen fasernweisen Isomorphismus

$$\beta_i': E_i' := p'^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \varphi(\mathbb{C}^{m_i})$$

E_i' nun in natürlicher Weise eine Topologie.

E' wird nun mit der finalen Topologie bezüglich der

*) X ist kompakt

Inklusionen $E_i' \rightarrow E'$ verstehen.

Die so entstandene Topologie auf E' hängt nicht von der Wahl der Überdeckung $\{U_i\}$ ab.

Ist $h: E \rightarrow F$ eine Abbildung in $\mathcal{E}(X)$, so wird $h' = \varphi'(h): E' \rightarrow F'$ erklärt durch

$$h'(e') := \varphi' \left(h \Big|_{p^{-1}(x)} \right) (e') \quad \text{für } e' \in p'^{-1}(x)$$

Damit ist φ' vollständig bestimmt.

Analog werden stetige Funktoren in mehreren Variablen, sowohl ko- als auch kontravariant, und deren Übertragung auf Vektorbündel definiert.

Als Beispiele in $\mathcal{E}(X)$ seien erwähnt

(i) $E \oplus F$

(ii) $E \otimes F$

(iii) $\text{Hom}(E, F)$

(iv) E^* , das zu E duale Bündel

(v) $\lambda^i(E)$, dabei rührt λ^i von der Darstellung

$$\wedge^i V = \bigoplus_{i \leq n} \lambda^i V \quad \text{der äußeren Algebra her } (\dim V = n)$$

Ferner hat man natürliche Isomorphismen

(i) $E \oplus F \cong F \oplus E$

(ii) $E \otimes F \cong F \otimes E$

(iii) $E \otimes (F' \oplus F'') \cong (E \otimes F') \oplus (E \otimes F'')$

(iv) $\text{Hom}(E, F) \cong E^* \otimes F$

(v) $\lambda^k(E \oplus F) \cong \bigoplus_{i+j=k} \lambda^i(E) \otimes \lambda^j(F)$

Es ist klar, wie nun $\text{Vekt}(X)$ zum kommutativen Halbring gemacht wird:

Seien $\{E\}, \{F\} \subset \text{Vekt}(X)$, so sei

$$\{E\} + \{F\} := \{E \oplus F\}$$

$$\{E\} \cdot \{F\} := \{E \otimes F\}$$

Mit $\mathbb{1}$ (oder einfach mit 1, keine Verwirrung!) bezeichnen wir die Klasse von $X \times \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $E \in \mathcal{E}(X)$

$$E \otimes (X \times \mathbb{C}) \simeq E$$

d.h., in $\text{Vekt}(X)$ gibt es ein Einselement,

$K(X)$ sei der Grothendieck-Ring von $\text{Vekt}(X)$. Man hat also einen Halbringhomomorphismus

$$\alpha : \text{Vekt}(X) \rightarrow K(X)$$

mit der bekannten universellen Eigenschaft.

Das Bild von $\{E\}$ in $K(X)$ werde mit $[E]$ bezeichnet. Ist $n \geq 0$, so bezeichne $[n]$ das Bild des trivialen Bündels der Dimension n . Jedes Element in $K(X)$ kann dann in der Form

$$[E] - [n]$$

geschrieben werden. Dies folgt aus der Tatsache, daß zu jedem Vektorbündel E ein Vektorbündel F existiert, sodaß $E \oplus F$ trivial ist. (siehe Atiah [2], p.27)

Änderung des Basisraumes

X, Y seien kompakte topologische Räume, $f: Y \rightarrow X$ eine Abbildung. Sei (E, p, X) ein Vektorbündel über X , so erklären

wir ein Vektorbündel (E', p', Y) durch

$$E' = \{ (y, e) / (y, e) \in Y \times E, f(y) = p(e) \}$$

$p': E' \rightarrow Y$ ist die Einschränkung der Projektion

$Y \times E \rightarrow Y$ auf E' .

Wegen $(E \oplus F)' \simeq E' \oplus F'$, $(E \otimes F)' \simeq E' \otimes F'$ für $E, F \in \mathcal{E}(X)$

und der universellen Eigenschaft des Tripels $(\text{Vekt}(X), \alpha, K(X))$

erhält man einen wohldefinierten Ringhomomorphismus

$$f*: K(X) \rightarrow K(Y)$$

$$\text{vermöge } f*([E] - [n]) = [E'] - [n]$$

f^* hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.

Es gilt allgemeiner der

Satz 3 Sei Ψ ein stetiger Funktor, $f: Y \rightarrow X$ eine Abbildung,

(E, p, X) ein Vektorbündel über X . Dann gilt

(i) E' hängt bis auf Isomorphie nur von der Homotopieklasse von f ab.

(ii) $\Psi'(E') \simeq (\Psi'(E))'$

(siehe Atiah [2], p.8 bzw. p. 16)

In X sei nun ein fester Basispunkt x_0 ausgezeichnet. Ist

$i: x_0 \rightarrow X$ die Inklusion, so wird definiert

$$\text{Def.4 } \tilde{K}(X) := \text{Kern}(i*: K(X) \rightarrow K(\{x_0\}))$$

$K(X)$ hängt also i.A. auch von x_0 ab.

Aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{K}(X) \rightarrow K(X) \xrightarrow{i^*} K(\{x_0\}) = \mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ folgt}$$

$$K(X) = \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$$

Dabei ist $\mathbb{Z} \subseteq K(X)$ vermöge $n \rightarrow [n]$ für $n \geq 0$ und $[n] \rightarrow -[-n]$ für $n \leq 0$ eingebettet. Wählt man daher einen anderen Basispunkt x_1' , so gilt

$$\tilde{K}(X, x_0) \cong \tilde{K}(X, x_1') \quad \text{als abelsche Gruppen}$$

Für einen topologischen Raum X mit ausgezeichnetem Basispunkt x_0 sei $S^n X$ die n -fache reduzierte Einhängung. Es kann dann allgemein definiert werden:

Def.5

$$\tilde{K}^{-n}(X) := \tilde{K}(S^n X) \quad n \geq 0$$

Ist Y abgeschlossener Teilraum von X , so setze

$$\tilde{K}^{-n}(X, Y) := \tilde{K}^{-n}(X/Y) = \tilde{K}(S^n(X/Y))$$

$\tilde{K}^{-n}(X, Y)$ ist auch dann definiert, wenn Y die leere Menge ist. Es ist dann X/Y (per def.) die disjunkte Vereinigung von X mit einem Punkt.

Sind X, Y kompakte topologische Räume mit Basispunkten x_0 bzw. y_0 , und ist $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Abbildung, so ist $f^*(\tilde{K}(Y)) \subseteq \tilde{K}(X)$. Wir bezeichnen daher

$$f^* : \tilde{K}(Y) \rightarrow \tilde{K}(X)$$

ebenfalls wieder mit f^* .

Sei $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ wie oben. X_f sei der Abbildungskegel. $i: Y \rightarrow X_f$ sei die Inklusion, $j: X_f \rightarrow X/Y$ die Projektion. Dann gilt:

Hauptsatz 6 Die Sequenz

$$\tilde{K}(SX_f) \xrightarrow{1^*} \tilde{K}(SY) \xrightarrow{\delta} \tilde{K}(X_f/Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X_f) \xrightarrow{1^*} \tilde{K}(Y)$$

ist exakt. δ ist dabei ein geeigneter Homomorphismus, der sich aus induzierten Abbildungen zusammensetzt.

Bew.: Siehe Atiah [2], p. 711.

Definition

Satz 7 X, Y seien kompakte topologische Räume mit Basispunkten x_0 bzw. y_0 . p_X bzw. p_Y seien die Projektionen $p_X: X \vee Y \rightarrow X$, $p_Y: X \vee Y \rightarrow Y$. Dann gilt:

$$\tilde{K}(X \vee Y) = p_X^* \tilde{K}(X) \oplus p_Y^* \tilde{K}(Y)$$

Die Multiplikation ist komponentenweise gegeben, d.h.

$$p_X^* \tilde{K}(X) \cdot p_Y^* \tilde{K}(Y) = 0$$

Bew.: $i_X: X \vee X \rightarrow Y$ bzw. $i_Y: Y \vee X \rightarrow Y$ seien die Inklusionen.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \vee Y & \xrightarrow{j} & X \vee Y \\ p_X \searrow & & \nearrow p_Y \\ & Y & \end{array}$$

ist kommutativ. Die Abbildungen sind klar. Da die Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{K}(X \vee Y) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X \vee Y) \xrightarrow[p_X^*]{1^*} \tilde{K}(Y) \rightarrow 0$$

wegen $i_Y^* p_Y^* = (p_Y i_Y)^* = 1_Y^*$ exakt ist (siehe Atiah [2], p. 7) folgt

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X \vee Y) &= j^* \tilde{K}(X \vee Y) \oplus p_Y^* \tilde{K}(Y) \\ &= p_X^* 1^* (\tilde{K}(X \vee Y)) \oplus p_Y^* \tilde{K}(Y) \\ &= \tilde{K}(X) \end{aligned}$$

als Gruppen. Da $\tilde{p}_X \tilde{K}(X) = \text{Kern } i_X^*$ und genau so $\tilde{p}_Y \tilde{K}(Y) = \text{Kern } i_Y^*$ Ideale in $\tilde{K}(X \vee Y)$ sind, folgt die Behauptung.

Satz 8 X, Y seien wie in Hilfssatz 7 mit Basispunkten x_0, y_0 .

$f: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ sei eine Abbildung.

$p: X_f \rightarrow \tilde{X}_f / Y =: Z$ sei die Abbildung, welche Y zu einem Punkt identifiziert. Ist $\alpha \in \tilde{K}(X_f)$ und $\beta \in \tilde{K}(Z)$, so ist

$$\alpha \cdot p^*(\beta) = 0$$

Bew.: Es ist $X_f = CX \cup_f Y = \frac{CX + Y}{\sim}$, wobei $(x, 1)$ mit $f(x)$ identifiziert wird. Wir schreiben CX wie folgt:

$$CX = C_1X \cup C_2X:$$

$$C_1X = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times X, \quad C_2X = \left[0, \frac{1}{2} \right] \times X / \{0\} \times X$$

Dann hat man $X_f = C_1X \cup_f Y \cup C_2X$

Wir betrachten den Homöomorphismus

$$g: \frac{CX \cup_f Y}{\left\{ \frac{1}{2} \right\} \times X} \longrightarrow \frac{CX \cup_f Y}{C_1X \cup_f Y} \vee \frac{CX \cup_f Y}{C_2X}$$

$g(\langle y \rangle) = \langle y \rangle$ im zweiten Summanden *)

$g(\langle t, x \rangle) = \langle t, x \rangle$ im zweiten Summanden für $t \gg \frac{1}{2}$

$g(\langle t, x \rangle) = \langle t, x \rangle$ im ersten Summanden

Weiter benötigen wir die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} & CX \cup_f Y & \\ \swarrow & & \searrow \\ \frac{CX \cup_f Y}{C_1X \cup_f Y} & & \frac{CX \cup_f Y}{C_2X} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \frac{CX \cup_f Y}{C_1X \cup_f Y} & \vee & \frac{CX \cup_f Y}{C_2X} \\ \swarrow & & \searrow \\ \frac{CX \cup_f Y}{C_1X \cup_f Y} & & \frac{CX \cup_f Y}{C_2X} \end{array}$$

*) $\langle \rangle$ meint stets die Klasse

Schließlich sei j die Komposition

$$j: CX \cup_f Y \rightarrow \frac{CX \cup_f Y}{\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \times X} \xrightarrow{g} \frac{CX \cup_f Y}{C_1 X \cup_f Y} \vee \frac{CX \cup_f Y}{C_2 X}$$

Klar ist: $a_i = p_i j$, $i = 1, 2$.

Sei $\beta \in \tilde{K}(Z)$ gegeben. Wir zeigen: $p^*(\beta) = a_1^*(\beta')$ mit einem $\beta' \in \tilde{K}\left(\frac{CX \cup_f Y}{C_1 X \cup_f Y}\right)$

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} CX \cup_1 Y & \xrightarrow{a_1} & \frac{CX \cup_f Y}{C_1 X \cup_f Y} \\ \downarrow & \nearrow & \\ Z = \frac{CX \cup_f Y}{Y} & & \end{array}$$

folgt: $a_1^* = p^* q^*$. Da $\frac{C_1 X \cup_f Y}{Y}$ in $\frac{CX \cup_f Y}{Y}$

zusammenziehbar ist, ist q^* ein Isomorphismus, also

$p^* = a_1^* q^{*-1}$. $C_2 X$ ist zusammenziehbar in $CX \cup_f Y$. Daher ist a_2^* ein Isomorphismus. Zu $\alpha \in \tilde{K}(CX \cup_f Y)$ gibt es daher ein $\alpha' \in \tilde{K}\left(\frac{CX \cup_f Y}{C_2 X}\right)$ mit $\alpha = a_2^*(\alpha')$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \alpha \cdot p^*(\beta) &= a_2^*(\alpha') a_1^*(\beta') = (p_2 j)^*(\alpha') (p_1 j)^*(\beta') \\ &= j^* (p_2^*(\alpha') p_1^*(\beta')) = 0 \text{ nach Hilfssatz 7} \end{aligned}$$

Schließlich wird noch benötigt:

Hauptsatz 9 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\tilde{K}(S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \mathbb{Z} & \text{falls } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Die Multiplikation in $\tilde{K}(S^n)$ ist für $n \geq 1$ identisch null.

Bew.: siehe Atiah [2], p. 80.

Die Adams-Operationen

Def.10 Es sei $1 + K(X)[[t]]^+$ die multiplikative Gruppe der formalen Potenzreihen über $K(X)$ mit konstantem Term 1. Wir definieren ein Halbgruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \lambda_t : \text{Vekt}(X) &\longrightarrow 1 + K(X)[[t]]^+ \\ \lambda_t(\{E\}) &:= \sum_{i \geq 0} \lambda^i(\{E\}) t^i \end{aligned}$$

Wegen der universellen Eigenschaft der Konstruktion von $K(X)$ erhält man einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \lambda_t : K(Y) &\longrightarrow 1 + K(Y)[[t]]^+ \\ \lambda_t(\{E\} - \{F\}) &:= \lambda_t(\{E\}) (\lambda_t(\{F\}))^{-1} \end{aligned}$$

Def.11 Die Adams-Operationen ψ^k für $k \geq 1$

$\psi_t : K(X) \longrightarrow K(X)[[t]]$ wird definiert durch

$$\psi_t(x) := -t \frac{d}{dt} (\log \lambda_t(x))$$

$\psi^k(x)$ wird nun erklärt als der Koeffizient von t^k in der Potenzreihe $\psi_t(x)$. (siehe Atiah [2], p.135)

Gleichwertig dazu ist die folgende Definition. Setzt man

$$\psi'_t(x) = -t \left(\frac{d}{dt} \lambda_t(x) \right) (\lambda_t(x))^{-1}$$

so erhält man $\psi^k(x)$ als Koeffizient von t^k in der Potenzreihe $\psi'_t(x)$.

Satz 12 Die γ^k sind Polynome in den λ^i , also insbesondere mit induzierten Abbildungen verträglich. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} \gamma^1(x) &= \lambda^1(x) = x \text{ für alle } x \in K(X), \text{ und für } k \geq 2 \text{ gilt} \\ \gamma^k(x) &= \lambda^1(x) \gamma^{k-1}(x) + \dots + (-1)^{k-1} \lambda^{k-1}(x) \gamma^1(x) \\ &+ (-1)^k \lambda^k(x) = 0 \end{aligned}$$

Bew.: Aus der zweiten Definition folgt

$$\left(\sum_{i \geq 0} \lambda^i(x) t^i \right) \left(\sum_{i \geq 1} (-1)^i \gamma^i(x) t^i \right) + t \sum_{k \geq 0} (k+1) \lambda^{k+1}(x) t^k = 0.$$

Satz 13 Die Adams-Operationen haben folgende Eigenschaften

- 1) $\gamma^k(x+y) = \gamma^k(x) + \gamma^k(y)$
- 2) Ist E ein Vektorbündel der konstanten Dimension 1 (nicht notwendig trivial), so ist $\gamma^k([E]) = [E]^k$
- 3) $\gamma^k(\gamma^l(x)) = \gamma^l(\gamma^k(x)) = \gamma^{kl}(x)$
- 4) $\gamma^k(xy) = \gamma^k(x) \gamma^k(y)$
- 5) Ist p eine Primzahl, so gilt $\gamma^p(x) \equiv x^p \pmod{p}$
- 6) Ist $u \in \tilde{K}(S^{2n})$, so ist $\gamma^k(u) = k^n u$

Bew.: Die Aussagen folgen aus der Definition der γ^k bzw. aus dem "Splitting principle". (siehe Atiyah [2], p.110)

§ 7 Der Fall $r = s = 2^k$, 2. Teil

Wir sind nun in der Lage, die ursprüngliche Vermutung zu widerlegen.

Def.1 Die Hopfinvariante

Sei $n \geq 1$ und $f: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$ eine Abbildung. X_f sei der zugehörige Abbildungskegel. $i: S^{2n} \rightarrow X_f$ und

$j': X_f \rightarrow \frac{S^{4n}}{S^{2n}}$. Dieser Raum enthält I als homöomorphen, zusammenziehbaren Teilraum, sodaß wir ihn in der exakten Sequenz aus Hauptsatz 6, §6 durch S^{4n} ersetzen dürfen. j sei die Komposition

$$j: S^{2n} \rightarrow \frac{S^{4n}}{S^{2n}} \rightarrow S^{4n}.$$

Dann ist folgende Sequenz exakt:

$$\rightarrow \tilde{K}(S^{4n}) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X_f) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(S^{2n}) \rightarrow 0$$

Wir zeichnen ein festes erzeugendes Element u von $\tilde{K}(S^{4n})$ sowie ein festes erzeugendes Element v von $\tilde{K}(S^{2n})$ aus. i^* ist surjektiv, es gibt daher ein $x \in \tilde{K}(X_f)$ mit $i^*(x) = v$. Weiter ist $i^*(x^2) = (i^*(x))^2 = v^2 = 0$, d.h., $x^2 \in \text{Kern } i^* = \text{Bild } j^*$. Es gibt daher ein $z \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 = z j^*(u)$. Weil j^* injektiv ist, ist z eindeutig bestimmt.

Definiere als Hopfinvariante $H(f) := z$.

Lemma2 $H(f)$ ist, bis auf ein Vorzeichen, wohldefiniert.

Bew.: Wir müssen zeigen: Ist $\bar{x}$ ein weiteres Element aus $\tilde{K}(X_f)$ mit $i^*(\bar{x}) = v$, so ist $\bar{x}^2 = x^2$.

Es ist $x - \bar{x}$ Kern i^* , also $x - \bar{x} = j^*(kv)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$x^2 = (\bar{x} + k j^*(v))^2 = \underbrace{\bar{x}^2 + 2k \bar{x} j^*(v)}_{= 0} + \underbrace{k^2 j^*(v^2)}_{= 0}$$

Dies folgt aus den Sätzen 8 und 9 des vorigen Paragraphen.

Hauptsatz 3 Sei $n \geq 1$ und $f: S^{4n-1} \rightarrow S^{2n}$ eine Abbildung mit ungerader Hopfinvariante $H(f)$. Dann ist $n = 1, 2$ oder 4 .

Bew.: Wir betrachten wieder die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{K}(S^{4n}) \xrightarrow{j^*} \tilde{K}(X_f) \xrightarrow{i^*} \tilde{K}(S^{2n}) \rightarrow 0$$

Sei u ein erzeugendes Element von $\tilde{K}(S^{4n})$, v ein erzeugendes Element von $\tilde{K}(S^{2n})$. Sei $x \in \tilde{K}(X_f)$ mit $i^*(x) = v$. Setze $y := j^*(u)$.

Wir machen nun von der Eigenschaft der Adams-Operationen Gebrauch, daß sie mit induzierten Abbildungen vertauschbar sind. Es folgt dann

$$i^* \psi^2(x) = \psi^2 i^*(x) = \psi^2(v) = 2^n v \text{ d.h. } \psi^2(x) = 2^n x + ay, \quad \psi^2(x) \equiv x^2 \equiv H(f)y \pmod{2}$$

mit einem $a \in \mathbb{Z}$.

$$\psi^3(x) = 3^n x + by \text{ für ein } b \in \mathbb{Z}$$

$$2^n x + ay = H(f)y \equiv 0 \pmod{2}, \text{ d.h. } a \equiv 1 \pmod{2} \text{ in } \mathbb{Z}.$$

Weiter ist $\varphi^k(y) = j^* \varphi^k(u) = j^*(k^{2n}u) = k^{2n}y$.

$$\begin{aligned}\varphi^6(x) &= \varphi^3(\varphi^2(x)) = \varphi^3(2^n x + ay) \\ &= 6^n x + (2^n b + 3^{2n} a)y \\ &= \varphi^2(\varphi^3(x)) \\ &= 6^n x + (2^{2n} b + 3^n a)y\end{aligned}$$

$K(X_f)$ wird von x und y als freier $\mathbb{Z}$ -Modul erzeugt, also

$$2^n b + 3^{2n} a = 2^{2n} b + 3^n a$$

$$2^n b (2^n - 1) = 3^n a (3^n - 1)$$

Weil a ungerade ist, folgt $2^n \mid 3^n - 1$.

$$3^n - 1 = 2(1 + 3 + \dots + 3^{n-1}). \text{ Es folgt } n = 1 \text{ oder}$$

$$n = 2q.$$

$$2^{2q} \mid 3^{2q} - 1, \quad 3^{2q} - 1 = 8(1 + 9 + \dots + 9^{q-1})$$

$$\text{also } q = 1 \text{ oder } q = 2r$$

$$2^{4r} \mid 3^{4r} - 1, \quad 3^{4r} - 1 = 80(1 + 81 + \dots + 81^{r-1})$$

$$\text{d.h. } r = 1 \text{ oder } r = 2s$$

Im zweiten Fall gilt

$$2^{8s} \mid 3^{8s} - 1, \quad 3^{8s} - 1 = (3^{4s} - 1)(3^{4s} + 1), \text{ d.h.}$$

$$2^{8s-1} \mid 3^{4s} - 1 \quad \text{oder} \quad 2^{8s-1} \mid 3^{4s} + 1$$

$$\text{Wir zeigen durch Induktion nach } s: 2^{8s-1} \nmid 3^{4s} + 1$$

$$s = 1: \quad 2^7 = 128 \quad 82 = 3^4 + 1$$

$$s \rightarrow s+1: \quad 2^8 = 256 \quad 81 = 3^4, \text{ also}$$

$$2^{8(s+1)-1} = 2^8 \cdot 2^{8s-1} \nmid 3^4(3^{4s} + 1) \nmid 3^{4(s+1)} + 1$$

Dann kann aber n unmöglich größer als 4 sein.

Die Hopf-Konstruktion

X, Y seien topologische Räume. Die Verbindung $X * Y$ ist erklärt als Quotientenraum von $X \times I \times Y$ bezüglich der Äquivalenzrelation $(x, 0, y) \sim (x', 0, y)$ und $(x, 1, y) \sim (x, 1, y')$ für alle $x, x' \in X, y, y' \in Y$.

Ist $f: X \times Y \rightarrow Z$ eine Abbildung, so wird die Hopf-Abbildung

$$\bar{H}(f): X * Y \rightarrow \mathbb{Z} Z$$

(= nichtreduzierte Einhängung) definiert durch

$$\bar{H}(f) (\langle x, t, y \rangle) := \langle f(x, y), t \rangle$$

Bem.: $S^{n-1} * S^{m-1} \approx S^{n+m-1}$

$$\text{vermöge } v(\langle x, t, y \rangle) = (\sin \frac{\pi}{2} t x, \cos \frac{\pi}{2} t y)$$

$$\sum S^{n-1} \approx S^n \text{ vermöge}$$

$$h(\langle x, t \rangle) = (\sin \pi t x, \cos \pi t)$$

Ist speziell eine Abbildung $f: S^n \times S^n \rightarrow S^n$ gegeben, so erhält man eine Abbildung

$$F: S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$$

Def.4 Ist $f: S^n \times S^n \rightarrow S^n$ eine Abbildung, so hängt der Abbildungsgrad der partiellen Abbildungen

$$f_x: S^n \rightarrow S^n : f_x(y) = f(x, y)$$

$$f^{x'}: S^n \rightarrow S^n : f^{x'}(y) = f(y, x')$$

bekanntlich nicht von x bzw. x' ab. Als Doppelgrad der Abbildung f bezeichnet man daher das 2-Tupel (d_1, d_2) , $d_i \in \mathbb{Z}$, mit $d_1 = \text{Grad } f_x$, $d_2 = \text{Grad } f^{x'}$.

Ist $f: S^n \times S^n \rightarrow S^n$ eine ungerade Abbildung, so sind nach dem Satz von Borsuk beide d_i ungerade (Dugundji [6])

Satz5 Sei $f: S^{2n+1} \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ eine Abbildung. Der Doppelgrad sei (d_1, d_2) . Dann gilt für die Hopf-invariante der zugehörigen Abbildung

$$F: S^{4n+3} \rightarrow S^{2n+2}$$

$$H(F) = d_1, d_2$$

Ist f eine ungerade Abbildung, so gilt insbesondere
 $n = 0, 1$ oder 3 .

Bew.: Zu der ersten Behauptung: siehe Husemoller [8], p.199f

Die zweite Behauptung folgt aus dem Hauptsatz3.

Wir können nun das Hauptergebnis formulieren.

Hauptsatz6 Ist $f: S^n \times S^n \rightarrow S^n$ eine ungerade Abbildung,
 so ist $n = 0, 1, 3$ oder 7

Bew.: Für ungerades n folgt die Behauptung aus Satz5 und
 Hauptsatz3.

Für gerades $n \neq 0$ folgt die Behauptung aus der Ungleichung
 $n_H(2m+1, 2m+1) > n_P(2m+1, 2m+1) > 2m+1$ für $m \neq 0$.

Damit ist die Vermutung $n_H(r, s) = n_P(r, s)$ widerlegt.

Im letzten Paragraphen wollen wir uns der Konstruktion de-
 finiter Systeme zuwenden und obere Abschätzungen für
 $n_H(r, s)$ herleiten.

§ 8 Konstruktion definiter Systeme und obere Abschätzungen für $n_H(r,s)$

Wir beginnen mit einem sehr nützlichen

Satz 1 Sei A eine n -reihige quadratische Matrix, deren
Komponenten a_{ij} im gewöhnlichen Sinne ungerade
stetige Funktionen

$$a_{ij} : S^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

sind. Ferner möge $A(x)$ für alle $x \in S^{r-1}$ regulär sein.
(Diese Voraussetzung ist z.B. für $r = n = 1, 2, 4$ oder 8
erfüllbar.) Dann existiert eine $2n$ -reihige quadratische
Matrix $B = B(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}) = (b_{ij}(x'))$ mit ungeraden
stetigen Funktionen

$$b_{ij} : S^r \rightarrow \mathbb{R}$$

sodaß $B(x')$ für alle $x' \in S^r$ regulär ist. Insbesondere gilt
dann für alle $i \geq 0$

$$n_H(r+i, n2^1) = n_P(r+i, n2^1) = n2^i$$

Bew.:

O.E. kann $A(x) A^t(x) = A^t(x) A(x) = E_n$ angenommen
werden. Sonst wende man das Schmitt'sche Orthonormalisie-
rungsverfahren an.

Nun setze man die a_{ij} auf ganz $\mathbb{R}$ fort vermöge

$$\bar{a}_{ij}(x) = \begin{cases} \|x\| a_{ij}(\frac{x}{\|x\|}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Also $\bar{A}(x) = 0$ für $x = 0$ bzw. $\|x\| A(\frac{x}{\|x\|})$ für $x \neq 0$. Setze

$$B(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}) = \begin{bmatrix} \bar{A}(x) & x_{r+1} E_n \\ -x_{r+1} E_n & \bar{A}^t(x) \end{bmatrix}$$

Durch Rechnung bestätigt man

$$B(x') B(x')^t = B(x')^t B(x') = (ux + x_{r+1}^2) E_{2n}$$

für alle $x' \in S^r$.

Das Verfahren wende man nun sukzessiv an.

Korollar2 $n_H(r, 2^{r-1}) = 2^{r-1}$ für alle $r \geq 1$.

Alle auftretenden Funktionen können bilinear gewählt werden.

Bew.: Man wähle $r = n = 1$ in Satz1.

Aus dem Korollar folgt, daß zu jedem $r \in \mathbb{N}$ ein kleinstes n existiert mit $n_H(r, n) = n$. Die Zahl 2^{r-1} in Korollar 2 ist i.A. zu groß. Es gilt z.B.

$$n_H(5, 8) = 8 < 2^4.$$

Ist $n = 2^k$ u, u ungerade, so gilt

$$(*) \quad r \leq 2^k$$

denn für $r > 2^k$ gilt: $n - n = 0 < 2^k < r$. 2^k ist Teilsumme von n , $\binom{n}{2^k}$ also ungerade.

Die Ungleichung $(*)$ kann folgendermaßen verbessert werden:

Lemma3

Sei $2^k < r \leq 2^{k+1}$. Ist $n_H(r, n) = n$, so gilt $2^{k+1}/n$.

Bew.: Sei $n = 2^{k+1} u + 1$ mit $0 < 1 < 2^{k+1}$. Wegen

$$n_P(r, n) \leq n_H(r, n) = n \leq n_P(r, n) \text{ gilt } n_H(r, n) = n_P(r, n)$$

Wir dürfen $2 \leq r \leq n$ annehmen. Es ist dann $n_P(r, n) \neq r + n - 1$.

$$n - 1 = \sum_{i \geq 0} r_i 2^i \quad r_k = 1$$

$$1 - 1 = \sum_{i \geq 0} l_i 2^i$$

$$n_P(r, n) = \sum_{i=0}^k (r_i + l_i) 2^i + 2^{k+1} u$$

Ist $l_k = 1$, so ist $(r_k + l_k) 2^k = 2^{k+1} > 1$, also $n_P(r, n) > n$

Ist $l_k = 0$, so ist

$$\sum_{i=0}^k (r_i + l_i) 2^i + 2^k > 1, \text{ also auch hier } n_P(r, n) > n.$$

Es muß daher $l = 0$ sein.

Bem. $n_H(r, n^k) = n$ impliziert $n_H(r, kn) = kn$ für alle $k \geq 1$.

Sei nämlich $f_1, \dots, f_n$ ein definites System in r bzw.

n Veränderlichen. Für $y = (y_1, \dots, y_n, \dots, y_{(k-1)n+1}, \dots, y_{kn})$ setze

$$g_1(x, y) = f_1(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_n)$$

$\vdots$

$$g_n(x, y) = f_n(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_n)$$

$$g_{n+1}(x, y) = f_1(x_1, \dots, x_r; y_{n+1}, \dots, y_{2n})$$

$\vdots$

$$g_{2n}(x, y) = f_n(x_1, \dots, x_r; y_{n+1}, \dots, y_{2n})$$

$\vdots$

$$g_{(k-1)n+1}(x, y) = f_1(x_1, \dots, x_r; y_{(k-1)n+1}, \dots, y_{kn})$$

$\vdots$

$$g_{kn}(x, y) = f_n(x_1, \dots, x_r; y_{(k-1)n+1}, \dots, y_{kn})$$

Dann ist das so definierte System der kn Funktionen definit.

Die vorhergehende Betrachtungen legen folgende Definition nahe:

Def.4 Zu gegebenem $r \in \mathbb{N}$ sei $n_K(r)$ die kleinste natürliche Zahl n , sodaß $n_H(r, n) = n$ gilt.

Satz 5 Für $1 \leq r \leq 9$ gilt:

Ist $2^{k-1} < r \leq 2^k$, so ist $n_K(r) = 2^k$.

Weiter gilt: $n_H(r, m) = m$ genau dann wenn $n_K(r) \mid m$.

Bew.: Sei 2^k wie in der Behauptung bestimmt. Wir haben nach Lemma3 und obiger Bemerkung nur noch zu zeigen:

$$n_K(r) = 2^k$$

Sei zunächst $r \leq 8$. Sei $n = n_K(r)$. Aus Satz2 von §5 folgt $r \leq n_H(r, n) = n_P(r, n) = n$.

Nun ist für alle möglichen s mit $r \leq s < 2^k$

$$n_P(r, s) = 2^k > s.$$

Aus $n_P(r, 2^k) = 2^k$ folgt hier die Behauptung.

Sei $r = 9$. Es ist $n_H(9, m) \geq 9$. Für $9 \leq m \leq 15$ gilt

$n_P(9, m) = 16$. Wendet man Satz1 auf die Matrix $A_3(x)$ von Seite 20 an, so ergibt sich $n_K(9) = 16$.

Ist nun $n_H(9, m) = m$, so ist in der dyadischen Entwicklung

$$m - 1 = \sum_{i \geq 0} m_i 2^i$$

$m_3 \neq 0$, d.h. $16 \mid m$.

Bem.6 $n_K(10) = 16$ oder $= 32$, also eine Potenz von 2.

Denn aus $n_H(10, n) = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ folgt

$n_H(9, n) = n$, d.h. $16 \mid n$.

Nun existiert für $r = 9$, $n = 16$ ein definites System aus 16 Bilinearformen, d.h. $n_H(10, 32) = 32$, also $n_K(10) \leq 32$.

Offene Fragen:

- (i) Ist $n_K(r)$ stets eine Potenz von 2 ?
- (ii) Folgt aus $n_H(r,n) = n$ stets $n_K(r)/n$?

Aus (ii) folgt (i), denn $n_H(r, 2^{r-1}) = 2^{r-1}$

In §5 haben wir gezeigt: $n_H(r,s) = n_P(r,s)$ falls $r \leq 8$ oder $s \leq 8$. Alle auftretenden Formen können bilinear gewählt werden. Aus dem Beweis von Satz 5 ergibt sich $n_H(9,s) = n_P(9,s) = 16$ für $8 \leq s \leq 16$. Auch hier können alle Formen bilinear gewählt werden.

Wir Zeigen nun

Satz 7 $n_H(r,s) = n_P(r,s)$ falls r oder $s \leq 9$. Alle Formen können bilinear gewählt werden.

Bew.: O.E. sei $r = 9$, $s = 16k + t$, $0 \leq t \leq 16$
(alle anderen Fälle sind schon erledigt)

$s - 1 = \sum_{i=0}^3 t_i 2^i + 16k$ Ist $t_3 = 0$, so ist

$$n_P(r,s) = r + s - 1 = n_H(r,s)$$

Ist $t_3 = 1$, so ist $n_P(r,s) = 16(k+1)$

Sei $y = (y_1, \dots, y_s)$. Die y_i werden in Gruppen eingeteilt:

$$y_1, \dots, y_{16}; y_{17}, \dots, y_{32}; \dots; y_{16k+1}, \dots, y_s$$

Aus den $k+1$ Gruppen bilde man ein bilineares definites System in 9 Variablen $x_1, \dots, x_9$ sowie in jeweils 16 bzw. t Variablen y_i . Da so entstandene System ist dann definit.

Weitere Konstruktion definiter Systeme

I. r und s seien beide gerade. Setze $r' = \frac{r}{2}$, $s' = \frac{s}{2}$

$$u_k := x_{2k-1} + i x_{2k} \quad k = 1, \dots, r'$$

$$v_l := y_{2l-1} + i y_{2l} \quad l = 1, \dots, s'$$

$$f_j(u, v) := \sum_{k+l=j} u_k v_l \quad j = 1, \dots, r' + s' - 1$$

Durch Induktion (wie in §3) nach der Anzahl aller komplexen Variablen beweist man, daß das Gleichungssystem

$$f_1(u, v) = \dots = f_{r'+s'-1}(u, v) = 0$$

nur die trivialen Nullstellen $u = 0$ oder $v = 0$ hat. Dies besagt: es existiert ein definites System aus $r + s - 2$ reellen Bilinearformen.

Falls r und s beide durch 4 bzw. beide durch 8 teilbar sind, konstruiert man analog mit Hilfe der Quaternionen bzw. der Cayleyschen Zahlen ein definites System aus $r + s - 4$ bzw. $r + s - 8$ Bilinearformen.

Folgerung 8 Seien $k, l \in \mathbb{N}$. Aus $n_P(k, l) = k + l - 1$ folgt

$$n_H(2^l k, 2^i l) = n_P(2^i k, 2^l l) \quad \text{für } 0 \leq i \leq l$$

Alle Formen können bilinear gewählt werden.

II. K sei die Cayley-Algebra. Eine $\mathbb{R}$ -bilineare Abbildung

$$f: K^2 \times K^{2n} \longrightarrow K^{2n+1}$$

werde wie folgt definiert:

$$\text{Sei } u \in K^2 \quad u = (x_1, x_2) \quad x_i \in K$$

$$v \in K^{2n} \quad v = (y_1, \dots, y_{2n}) \quad y_i \in K$$

Setze

$$\begin{aligned} F_1(u,v) &:= x_1 y_1 + \bar{y}_{2n} x_2 \\ F_{2t}(u,v) &:= y_{2t} x_1 - x_2 \bar{y}_{2t-1} \quad 1 \leq t \leq n \\ F_{2t+1}(u,v) &:= x_1 y_{2t+1} - \bar{y}_{2t} x_2 \quad 1 \leq t \leq n-1 \\ F_{2n+1}(u,v) &:= x_1 y_1 - y_1 x_1 \end{aligned}$$

schließlich

$$f(uv) := (F_1(u,v), \dots, F_{2n+1}(u,v))$$

Durch umfangreiche Rechnungen^{*)} erkennt man: aus

$f(u,v) = 0$ folgt $u = 0$ oder $v = 0$.

Dies besagt, daß man die oben definierte Funktion f als definites System aus 16 reellen Variablen $u_1, \dots, u_{16}$ bzw. 16n reellen Variablen $v_1, \dots, v_{16n}$ auffassen kann.

Die Cayleyschen Zahlen werden nun als Paare von Quaternionen mit der Multiplikation $(a,b) (c,d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$ aufgefaßt. Setze

$$\begin{aligned} x_1 &= (u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k, u_5 + u_6 i + u_7 j + u_8 k) \\ x_2 &= (u_9 + u_{10} i + u_{11} j + u_{12} k, u_{13} + u_{14} i + u_{15} j + u_{16} k) \\ y_t &= (v_{8(t-1)+1} + v_{8(t-1)+2} i + v_{8(t-1)+3} j + v_{8(t-1)+4} k, \\ &\quad v_{8(t-1)+5} + v_{8(t-1)+6} i + v_{8(t-1)+7} j + v_{8(t-1)+8} k) \\ &\quad t = 1, \dots, 2n \end{aligned}$$

Durch Spezialisierung der u_r bzw. v_s erhält man nun folgende definite Systeme.

$$u_3 = \dots = u_8 = v_3 = \dots = v_8 = 0$$

Es ist dann $x_1 y_1 - y_1 x_1 = 0$. Es bleiben 16n Bilinearformen.

$$u_4 = \dots = u_8 = v_4 = \dots = v_8 = 0$$

$$x_1 y_1 - y_1 x_1 = (2(-v_2 u_3 + v_3 u_2)k, 0).$$

Man erhält also $16n + 1$ Bilinearformen. Dies heißt

*) siehe Köhnen [10] bzw. Adem [1], von welchem das Beispiel stammt

Satz 9 Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} n_H(10, 10 + 16(n-1)) &= n_P(10, 10 + 16(n-1)) = 16n \\ n_H(11, 11 + 16(n-1)) &\leq 16n + 1 = n_P(11, 11 + 16(n-1)) + 1 \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise erhält man weitere definite Systeme aus Bilinearformen. Auf die Durchführung sei verzichtet.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht. R steht für die reellen Zahlen. n sei ≥ 0 .

- 1) $R^{16} \times R^{16+16n} \longrightarrow R^{23+16n}$
- 2) $R^{13} \times R^{13+16n} \longrightarrow R^{19+16n}$
- 3) $R^{11} \times R^{11+16n} \longrightarrow R^{17+16n}$
- 4) $R^{10} \times R^{10+16n} \longrightarrow R^{16+16n}$
- 5) $R^{10} \times R^{16+16n} \longrightarrow R^{22+16n}$
- 6) $R^{16} \times R^{10+16n} \longrightarrow R^{22+16n}$
- 7) $R^{11} \times R^{15+16n} \longrightarrow R^{21+16n}$
- 8) $R^{15} \times R^{11+16n} \longrightarrow R^{21+16n}$
- 9) $R^{10} \times R^{14+16n} \longrightarrow R^{20+16n}$
- 10) $R^{14} \times R^{10+16n} \longrightarrow R^{20+16n}$
- 11) $R^9 \times R^{16+16n} \longrightarrow R^{16+16n}$
- 12) $R^{16} \times R^{9+16n} \longrightarrow R^{16+16n}$

Ist H der Quaternionenkörper, so kann man mit Hilfe einer geeigneten $\mathbb{R}$ -bilinearen Abbildung

$$g: H^3 \times H^{4n} \longrightarrow H^{4n+1}$$

zwei weitere Beispiele angeben^{*)}.

*) Adem [1]

$$13) \quad R^{12} \times R^{15+16n} \longrightarrow R^{21+16n}$$

$$14) \quad R^{12} \times R^{11+16n} \longrightarrow R^{17+16n}$$

III. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $n = \sum_{i \geq 0} n_i 2^i$ die Dualdarstellung.

$$a(n) := \sum_{i \geq 0} n_i$$

Für ungerades n sei weiter

$$k(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{8} \\ 1 & \text{falls } n \equiv 3 \text{ oder } 5 \pmod{8} \\ 4 & \text{falls } n \equiv 7 \pmod{8} \end{cases}$$

Für ungerade m und n sei schließlich

$$t = \min(k(n), k(m))$$

Es gilt nun

Satz 10 Sei $r \succ s$, r und s ungerade. Dann existiert ein definites System aus $r + s - 1 - (a(r) - a(r-s))$ Bilinearformen in $r+1$ Veränderlichen $x_1, \dots, x_{r+1}$ und $s+1$ Veränderlichen $y_1, \dots, y_{s+1}$.

Bew.: Siehe Milgram [12]

Setzt man für $h \succ 3$ und $n \succ 0$

$$r = 2^h + 2^{h+1} + n2^{h+2}, \quad s = 2^{h+1}$$

$$\text{so ist } a(r-1) - a(r-s) = h$$

$$t = \min(k(r-1), k(s-1)) = 4$$

und es folgt

Korollar 11

$$n_P(r,s) = (n+1)2^{h+2} \leq n_H(r,s) \leq (n+1)2^{h+2} + 2^h - h - 5$$

Für $h = 3$ und alle $n \geq 0$ gilt insbesondere

$$n_H(8+16+32n, 16) = 32(n+1) \quad *)$$

Alle auftretenden Formen können bilinear gewählt werden.

Zusammenfassend läßt sich über die Zahlen $n_P(r,s)$ sagen, daß sie sich als grobe Abschätzung der Zahlen $n_H(r,s)$ nach unten eignen. Darüberhinaus liefern sie in einer Reihe von Spezialfällen die genauen Werte der Zahlen $n_H(r,s)$. Der Vollständigkeit halber seien diese Fälle noch einmal zusammengestellt.

- 1) $n_H(r,s) = n_P(r,s)$ falls r oder $s \leq 9$
- 2) $n_H(2^i r, 2^i s) = n_P(2^i r, 2^i s)$ für $0 \leq i \leq 3$,
falls $n_P(r,s) = r + s - 1$
- 3) $n_H(r, ns) = n_P(r, ns) = ns$ für alle $n \geq 1$, falls
 $n_H(r,s) = s = n_P(r,s)$
- 4) $n_H(10, 10+16(n-1)) = n_P(10, 10+16(n-1)) = 16n$ für $n \geq 1$

*) Spezialfall von Folgerung 8

Literaturverzeichnis

- 1 Adem, J., On nonsingular bilinear maps, Springer Verlag Lecture Notes in Math. 168 (1970), 11-24
- 2 Atiah, M.P., K-Theory, New York 1967
- 3 Behrend, F. Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen, Compositio Math. 7 (1940), 1-19
- 4 Bott, R., Lectures on $K(X)$, New York 1969
- 5 Cassels, J.W.S., On the representation of rational functions as sums of squares, Acta Arithmetica 9 (1964), 79-82
- 6 Dugundji, J., Topology, Boston 1964
- 7 Hopf, H., Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra, Comm.Helv. 13 (1940), 219-239
- 8 Husemoller, D., Fibre Bundles, Second Edition, New York 1975
- 9 Karoubi, M., K-Theory, New York 1968
- 10 Können, K., Definite Systeme und Quadratsummen in der Topologie, Diplomarbeit, Mainz WS 1972/73
- 11 Lang, S., The theory of real places, Annals of Math. 57 (1953), 375-391
- 12 Milgram, J., Immersing projective spaces, Annals of Math. 85 (1967), 473-482

- 13 Pfister, A., Zur Darstellung von -1 als Summe von
Quadraten in einem Körper, Journal London Math.
Soc. 40 (1971), 309-312
- 14 Pfister, A., Quadratische Formen in beliebigen Körpern,
Invent. Math. 1 (1966), 116-132

Lebenslauf

Am 1.10.1946 wurde ich, Klaus Köhnen, in Wintrich Kreis Bernkastel Wittlich geboren. Von Ostern 1953 bis Ostern 1957 besuchte ich dort die Volksschule. Danach war ich bis Ende 1958 Schüler des Nikolaus Cusanus Gymnasiums in Bernkastel Kues. Anfang 1959 wechselte ich zum St.Matthias Gymnasium in Gerolstein, wo ich 1966 das Abitur bestand. Anschließend absolvierte ich die Wehrpflicht in der Auerbach-Kaserne in Zweibrücken. Im Wintersemester 1967 begann ich das Studium der Mathematik und der Physik an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz. Hier legte ich 1973 die Diplomprüfung ab. Seit 1974 bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Mathematik dieser Universität.

Ich versichere hiermit, daß ich
diese Arbeit selbstständig angefertigt
und außer der angegebenen Literatur
keine weiteren Hilfsmittel benutzt
habe.

Klaus Köhnen

